به نام زندگی

درس: احتمال مهندسی

ahaghbin@gmail.com

www.dr_haghbin.info/courses/undergraduate/Probabilities

- مفاهیم پایه در احتمال

- آزمایش تصادفی   Experiment - trial

آزمایشی است که به یکی از نتایج e_1 و e_2 و ... و e_n منجر می‌شود

ولی نتیجه‌ی آن از قبل مشخص نیست.

به طور مثال: در آزمایش تصادفی پرتاب یک تاس نتایج حاصل از آزمایش تصادفی، یکی از اعداد ۱، ۲، ۳، ...، ۶ هستند. به عبارت دیگر نتیجه ی آزمایش یکی از اعضای مجموعه $\{1, 2, \ldots, 6\}$ هستند.

یا به طور مثال: در آزمایش پرتاب سکه، نتیجه ی آزمایش یکی از حالتهای زیر است (شیر یا خط)

H یا Head یا شیر

T یا Tail یا خط

- فضای نمونه Sample space

فضای نمونه برای هر آزمایش تصادفی ، مجموعه‌ای است از تمام نتایج ممکن آن آزمایش تصادفی که آن را با Ω نمایش می‌دهیم.

به طور مثال: در آزمایش پرتاب سکه ، داریم

$$\Omega = \{H, T\}$$

به طور مثال در آزمایش پرتاب تاس داریم

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$$

- فضای نمونه در یک آزمایش تصادفی می تواند کران دار (محدود) یا بی کران (نامحدود) باشد.

- فضای نمونه در یک آزمایش تصادفی می تواند شمارش پذیر (گسسته) یا شمارش ناپذیر (پیوسته) باشد.

به طور مثال: آزمایش های پرتاب سکه، پرتاب تاس، فضای نمونه کران دار و شمارش پذیر است.

مثال: اگر آزمایش تصادفی، انتخاب یک عدد طبیعی باشد، داریم

$\Omega = \mathbb{N}$

که یک مجموعه گسسته و بی کران است.

مثال: آزمایش تصادفی اندازه‌گیری دمای یک اتاق باشد که مقادیری بین 18 تا 32 درجه سانتیگراد دارد، داریم

$$\Omega = [18, 32]$$

که یک مجموعه شمارش‌ناپذیر (پیوسته) و کران‌دار است.

- پیش‌آمد یا رخداد   Event

در هر آزمایش تصادفی، یک پیش‌آمد E در واقع یک زیرمجموعه از فضای نمونه (Ω) است.

$$E \subseteq \Omega$$

پیش‌آمد

به طور مثال: در آزمایش پرتاب تاس پیشامد اینکه عدد ظاهر شده زوج باشد

$$E = \{2, 4, 6\}$$

مثال: در آزمایش انتخاب یک عدد طبیعی، پیشامد اینکه عدد انتخاب شده مضربی از ۵ و کوچکتر از 100 باشد

$$E = \{5, 10, 15, \dots, 95\} = \{5k \mid k \in \mathbb{N},\ 5k < 100\}$$

هدف در این بخش این است که بتوانیم برای هر آزمایش تصادفی، احتمال پیش‌آمدهای ممکن را به صورت یک عدد بین صفر و یک تعیین کنیم.

همان طور که دیدیم در مورد آزمایش‌های تصادفی و پیش‌آمدها، معمولاً با مجموعه‌ها سروکار داریم. به همین جهت ابتدا مروری کلی بر نظریه مجموعه‌ها خواهیم داشت.

- مروری کوتاه بر نظریه مجموعه‌ها

- تعریف مجموعه   set

یک مجموعه (set) در واقع گروهی از اعضا است به عنوان مثال

$A = \{1, \alpha, +, /\}$ کران دار و شمارش پذیر

$B = \{1, 2, 3\}$ کران دار و شمارش پذیر

$C = [-1, 1]$ کران‌دار و شمارش‌ناپذیر

$D = \{3, 6, 9, \dots\}$ بی‌کران و شمارش‌پذیر

اعضای مجموعه می‌توانند عدد، حروف، علایم و ...

اعضای مجموعه را المان یا عضو یا عنصر مجموعه نیز می‌گویند.

element

- مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد، مجموعه تهی می‌گوییم.

$\phi = \{\}$

- در فضای مجموعه‌ها، مجموعه‌ای که شامل تمامی اعضای ممکن در فضا باشد را مجموعه‌ی مرجع می‌گوییم و با U نمایش می‌دهیم.

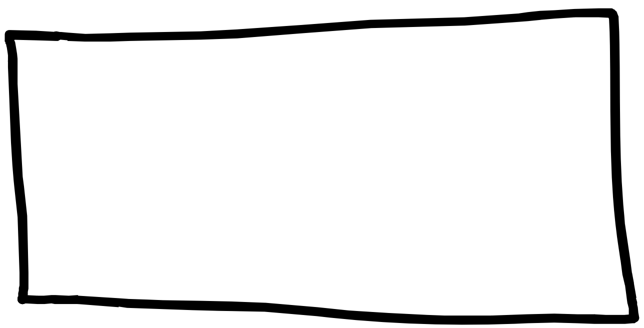
* مجموعه A را زیرمجموعه B می‌گوییم، اگر همه‌ی اعضای مجموعه‌ی A عضو مجموعه‌ی B نیز باشند.

$$A \subseteq B$$

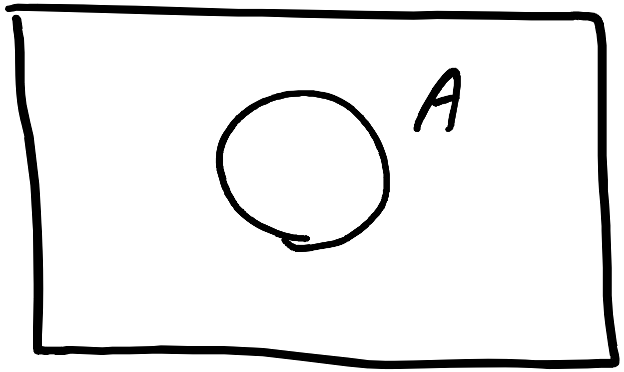
* مجموعه A را مساوی مجموعه B می‌گوییم اگر اعضای A و B یکسان باشند به عبارت دیگر

$$A \subseteq B \quad , \quad B \subseteq A \iff A = B$$

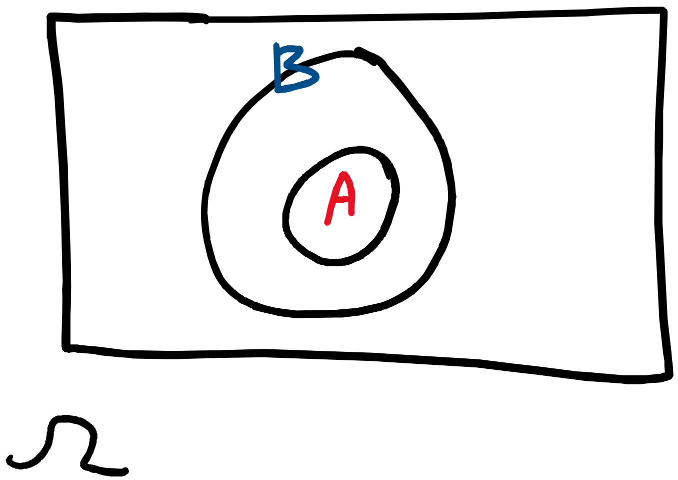
در نظریه مجموعه‌ها می‌توانیم از دیاگرام ون (Ven Diagram)
برای بهتر نشان دادن مفاهیم مجموعه‌ها کمک بگیریم.



Ω



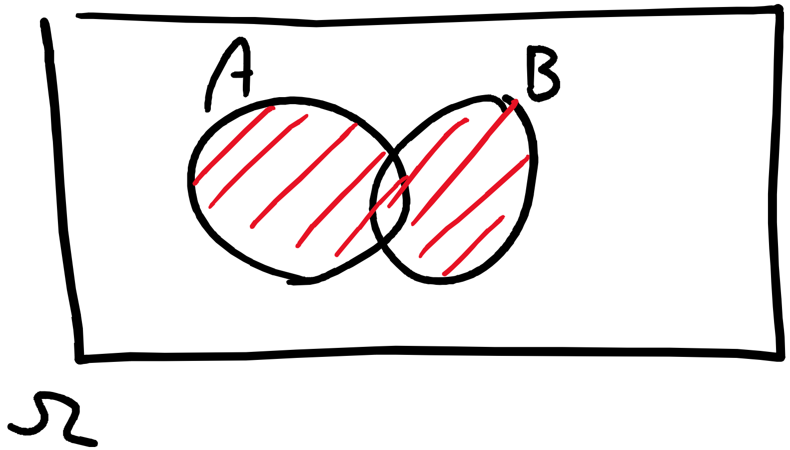
Ω



$A \subseteq B$

- مفهوم اجتماع دو مجموعه‌ی A و B

اجتماع دو مجموعه‌ی A و B را با $A \cup B$ یا $A+B$ نمایش می‌دهیم
که مجموعه‌ای است که اعضای آن یا عضو A هستند یا عضو B (یا عضو هر دو)

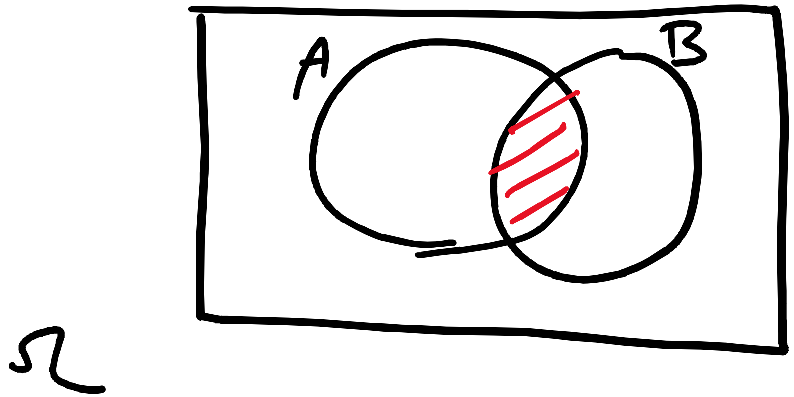


$A \cup B$ یا $A+B$

- مفهوم اشتراک دو مجموعه

اشتراک دو مجموعه‌ی A و B را با $A \cap B$ یا AB نمایش می‌دهیم

که مجموعه‌ای است که اعضای آن هم عضو A و هم عضو B هستند. (اعضای مشترک A و B)



$A \cap B$ یا AB

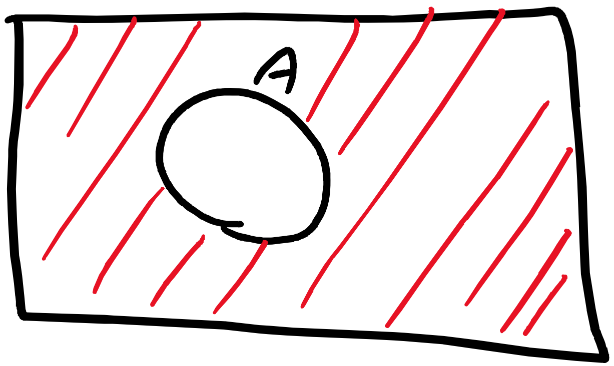
- مفهوم مکمل یک مجموعه   Complement

منظور از مکمل یک مجموعه A ، مجموعه‌ای از اعضای Ω است که عضو A نباشند

A^c یا $\bar{A}$ یا A'

$$A^c + A \equiv A \cup A^c = \Omega$$

$$A^c A \equiv A \cap A^c = \varphi$$

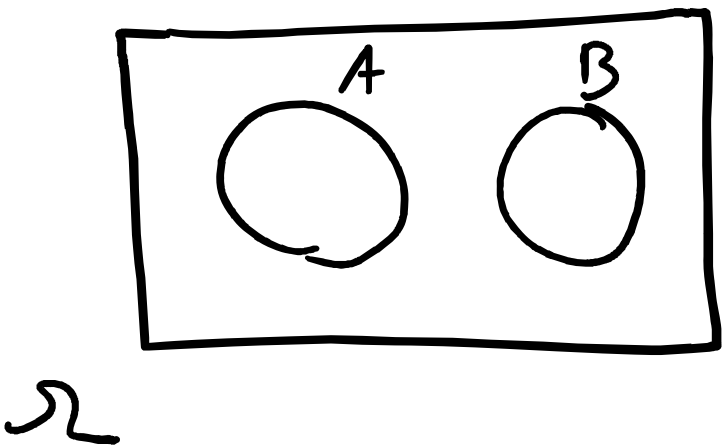


Ω

A^c ! $\bar{A}$! A'

* هر دو مجموعه که هیچ اشتراکی با یکدیگر نداشته باشند را دو مجموعه جدا از هم

که Disjoint می‌گوییم.

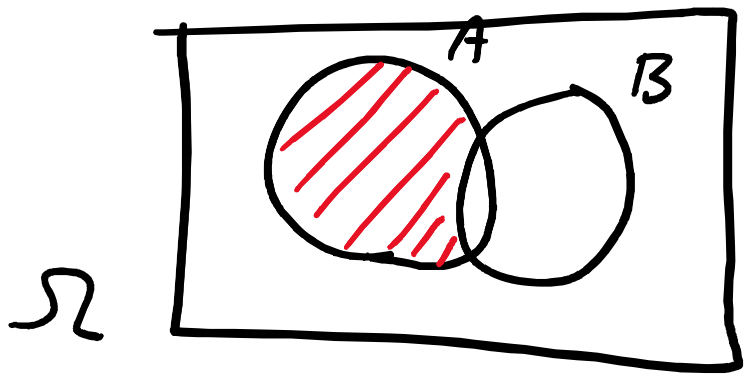


$$A \cap B = \varphi$$

مفهوم تفاضل در مجموعه

تفاضل دو مجموعه‌ی A و B را با $A - B$ نمایش می‌دهیم که

مجموعه‌ای است از اعضای A که عضو B نباشد



$$A - B = A \cap B^c$$

$$= A - (A \cap B)$$

- یادآوری برخی قوانین در فضای مجموعه‌ها

1) $A \cup \phi = A \quad , \quad A \cap \Omega = A$

2) $A \cup \Omega = \Omega \quad , \quad A \cap \phi = \phi$

3) $A \subset B \ , \ B \subset A \iff A = B$

4) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ قانون شرکت پذیری

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ قانون توزیع پذیری

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

6) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ قوانین دمورگان

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

7) $A \cap B = B \cap A$ خاصیت جابجایی

$A \cup B = B \cup A$

$$\underbrace{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n}_{A_1 A_2 \cdots A_n} = \bigcap_{i=1}^{n} A_i \equiv \prod_{i=1}^{n} A_i$$

بنابراین شرکت پذیری و جابه جایی
برای این روابط قابل استفاده است

$$\underbrace{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}_{A_1 + A_2 + \cdots + A_n} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} A_i$$